★ 2014年度「見た目の大きさと距離の関係」続編 ★

見た目の形と距離の関係

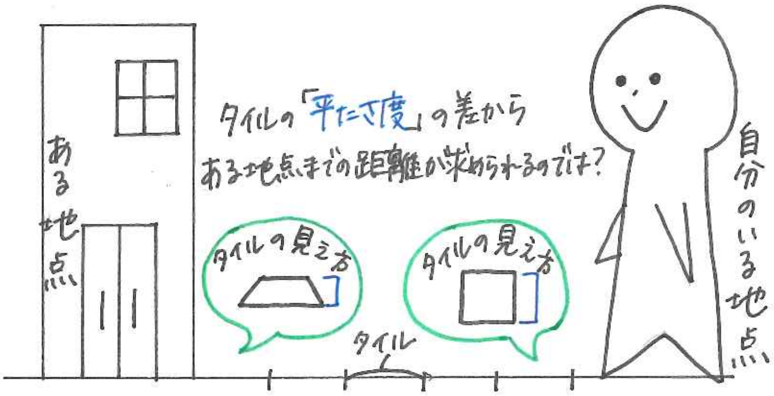
～地面のタイルまでの距離が遠くなると、タイルが平たく見えるのはなぜだろう??～

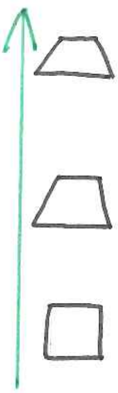
同志社中学校 2年C組 3番 池田はるな

★ 研究の動機 ★

この間、両親とある建物に行ったとき、ふと足元を見ると床に大きさの等しい正方形のタイルがキレイに揃って敷かれていた。このとき、自分の真下のタイルは □(正方形)に見えるのに対し、遠くの方のタイルを見る(斜めにタイルを見る)と □は潰れ ⏢ になり、もっと遠くの方のタイルを見ると ⏢ となった。

これには何か数学的な決まりがあるのではと考えた。その決まりを見つければ、見た目の形から、その地点までの距離を求めることができるのではないかと思い、このテーマを設定した。





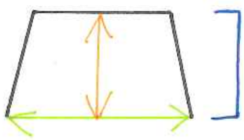
★ 研究方法・内容とその結果・考察 ★

・実験1

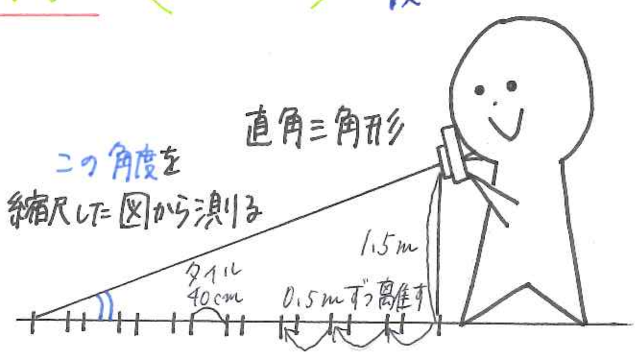
40×40cmの方眼紙を使って正方形のタイルを作り、そのタイルを0.5mずつ距離を離しながら、地面から1.5mのところで写真を撮る。

次に、撮影したタイルの「平たさ度」を調べるため、写真上の台形(=タイル)の高さと底辺の長さを測り、その比を求める。

$$\text{タイルの「平たさ度」} = \frac{\text{台形の高さ}}{\text{台形の底辺の長さ}}$$



又、この実験の様子を直角三角形と考え、これを正確に縮尺した図を書き、その図から実際に地面と視線とが成す角度も分度器で測る。

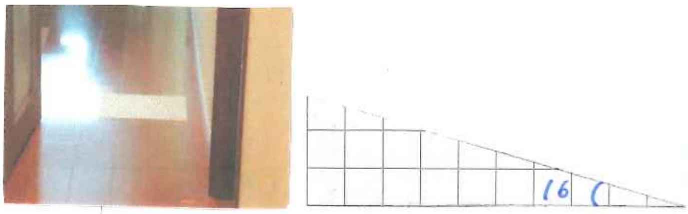


0 m

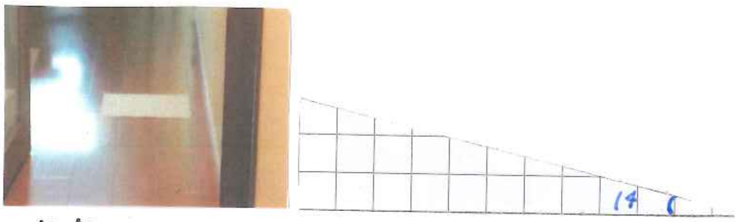
0.5 m

1.0 m

…



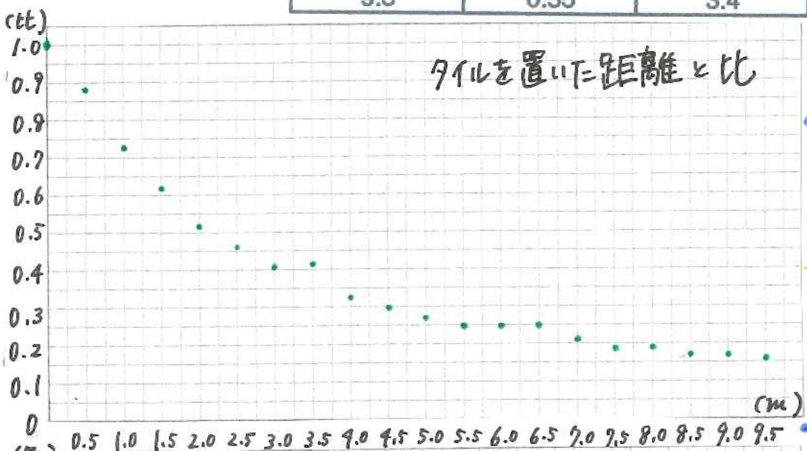
5.0 m

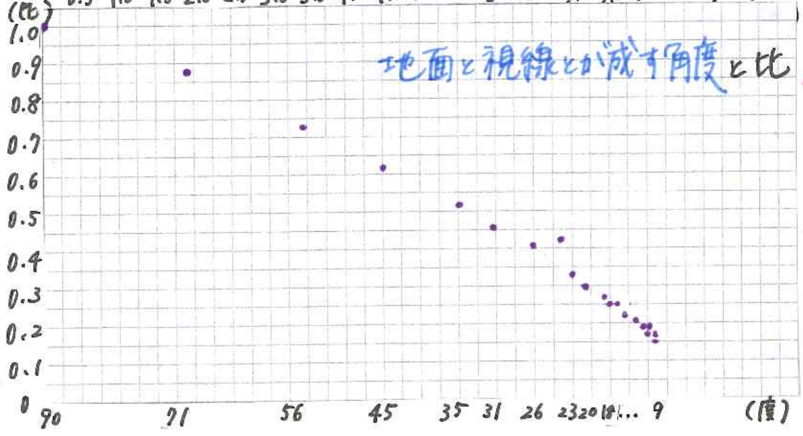


5.5 m

実験 1

タイルを置いた距離(m)	写真上の台形の高さ(cm)	写真上の台形の底辺の長さ(cm)	台形の高さと底辺の長さの比	地面と視線とが成す角度
0	8.15	8.15	1	90
0.5	7.8	8.9	0.8764…	71
1	6.75	9.2	0.7336…	56
1.5	5.3	8.5	0.6235…	45
2	5.95	11.5	0.5173..	35
2.5	4.4	9.55	0.4607…	31
3	3.95	9.75	0.4051…	26
3.5	3.6	8.6	0.4186…	23
4	2.5	7.65	0.3267…	20
4.5	1.7	5.6	0.3035…	18
5	1.05	3.9	0.2692…	16
5.5	1	4	0.25	15
6	1	4.05	0.2469…	14
6.5	0.9	4.05	0.2222…	13
7	0.8	3.9	0.2051…	12
7.5	0.8	4.3	0.1860…	11
8	0.75	4	0.1875	10
8.5	0.65	3.85	0.1688…	10
9	0.6	3.6	0.1666…	9
9.5	0.55	3.4	0.1617…	9





・結果

・距離が遠くなる程、又、地面と視線とが成す角度が小さくなる程、台形の高さと底辺の長さの比は小さくなった。

・グラフから法測は分からなかった。

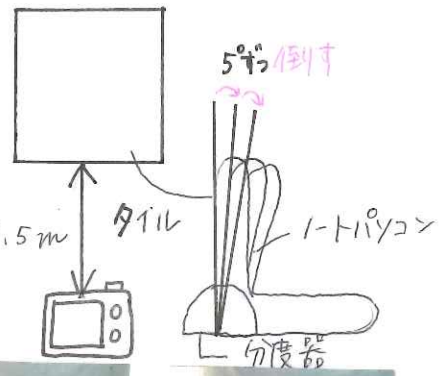
・考察

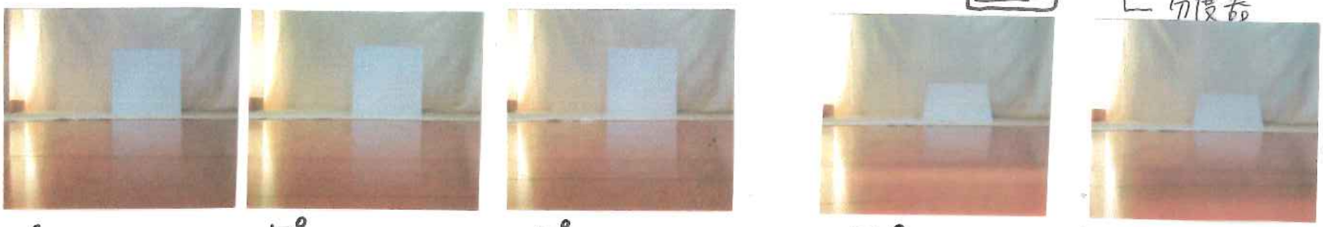
距離が遠くなるとタイルをより鋭角に斜めに見ることになる。

▶▶▶ 下のようにタイルを回転させても同じように見えるのでは??

・実験2

40×40cm のタイルを地面に垂直に置き、分度器で5°ずつ倒しながら、タイルから1.5mのところで90°倒すまで撮影する。
次に実験1と同様に台形の高さと底辺の長さを測り、その比を求める。

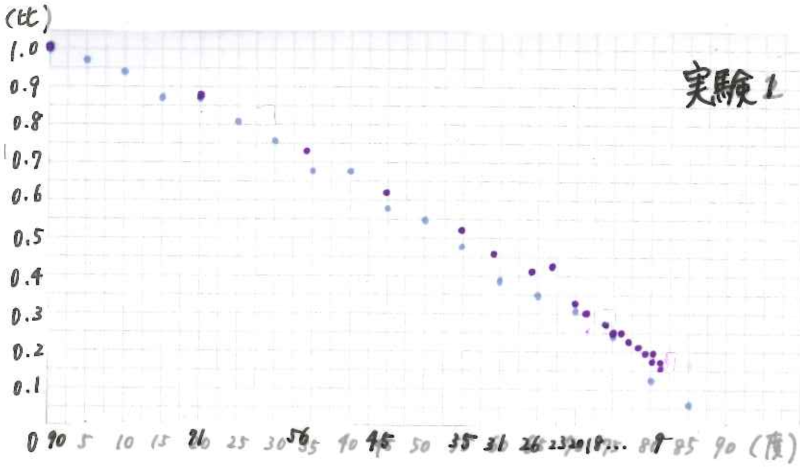




0°　5°　10°　…　50°　55°　…

実験2

タイルを倒した角度	写真上の台形の高さ(cm)	写真上の台形の底辺の長さ(cm)	台形の高さと底辺の長さの比
0	3.1	3.1	1
5	3	3.1	0.9677…
10	2.9	3.1	0.9354…
15	2.7	3.1	0.8709…
20	2.7	3.1	0.8709…
25	2.5	3.1	0.8064…
30	2.35	3.1	0.7580…
35	2.1	3.1	0.6774…
40	2.1	3.1	0.6774…
45	1.8	3.1	0.5806…
50	1.7	3.1	0.5483…
55	1.5	3.1	0.4838…
60	1.2	3.1	0.3870…
65	1.1	3.1	0.3548…
70	0.95	3.1	0.3064…
75	0.75	3.1	0.2419…
80	0.4	3.1	0.1290…
85	0.2	3.1	0.0645…
90	0	3.1	0



実験2のグラフに実験1の地面と視線とが成す角度と比のグラフ重ねる。

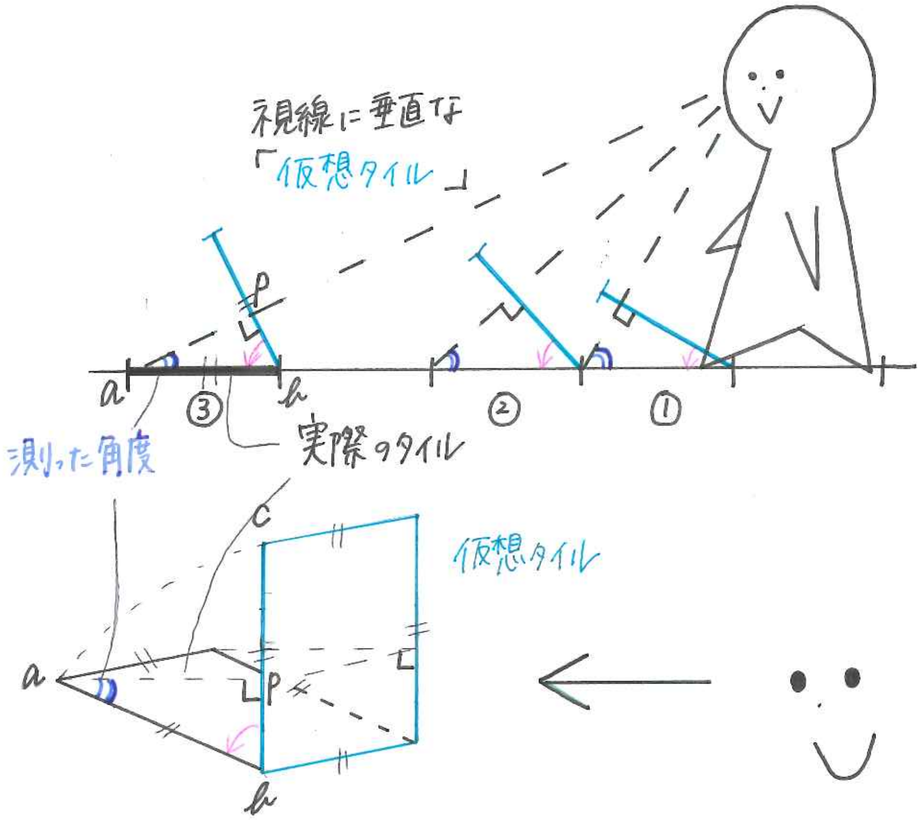
・結果

・グラフからタイルに対する視線の角度が台形の高さと底辺の長さの比を決めるのではないかと考えられる。

・考察

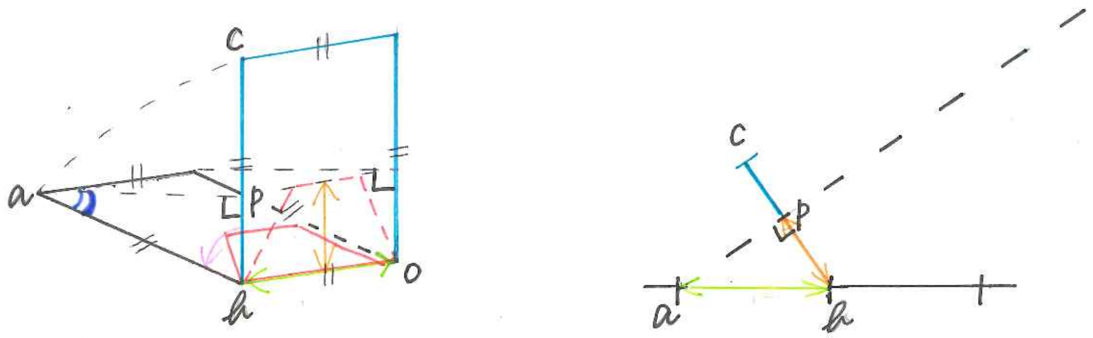
・実験1で地面と視線とが成す角度が小さくなるのと、実験2でタイルを回転させたときのグラフの形が同じようになるのはなぜだろう？

実験1と実験2を関連づけるため、下のように図で表す。
視線に垂直なタイルが実際の地面のタイルと接して存在すると仮定する。



図のように実験1で①→②→③と遠くにいけばいくほど仮想タイルと実際のタイルとが成す角度が大きくなることが分かる。この角度が実験2で倒した角度に相当するので同じように比が変わる。又、P.3のグラフの形が同じようになると考える。

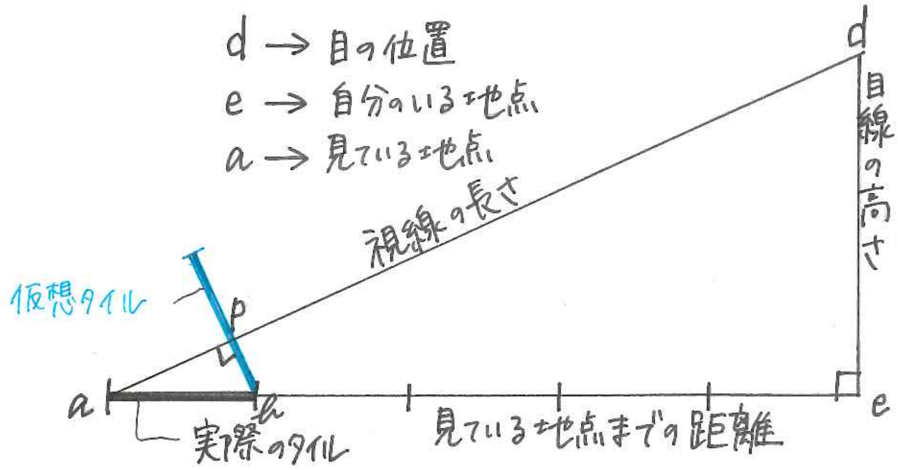
次に、"台形の高さと底辺の長さの比"が図のどこにあたるのかを考える。



☆ 仮想タイル上に写真で撮ったタイルが投影されていると考える。

実験で写真を撮ったときの"台形の高さ"というのは、図の bp と等しい。又、"台形の底辺の長さ"は図の bo。bo は ba と長さが等しいので、$\dfrac{\text{台形の高さ}}{\text{台形の底辺の長さ}}$ は、両図の $\dfrac{bp}{ba}$ となる。

以上までの事柄が分かったところで実際に自分のいる地点から見ている地点までのおおよその距離を求める方法を考える。下図は実験1をシンプルに直角三角形として書いた図である。



小さい三角形△hap、
大きい三角形△daeの角は
・直角(∠p，∠e)
・共通な∠a

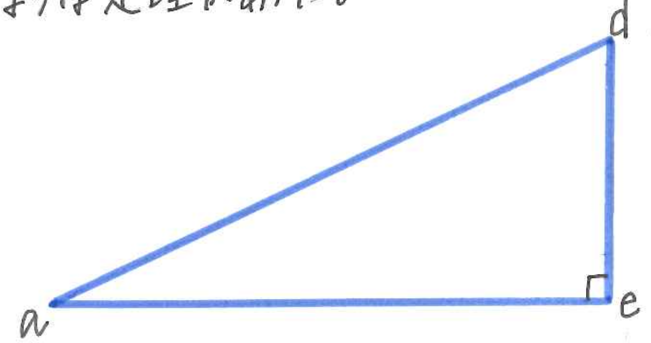
2つの角が等しいので△daeと△hapは「相似の三角形」である。

相似の三角形ということは、各辺の長さは違っても、長さの"比"は等しい。…ということは、先程考えた「台形の高さと底辺の長さの比」が使えるのではないか。「台形の高さと底辺の長さの比」は $\frac{hp}{ha}$。相似の三角形であるので $\frac{hp}{ha}=\frac{de}{da}$。私の"目線の高さ"である1.5mをdeにあてはめ、実験1の「台形の高さと底辺の長さの比」を使えばdaである"視線の長さ"が求められる。

<例：実験1のタイルを置いた距離が3mのとき>

$\frac{1.5}{da} \fallingdotseq 0.40512820512$　　$da = 1.5 \div 0.40512820512$
$\fallingdotseq 3.70253164564\ (m)$

しかし、これだけでは距離は求められないので何か良い方法はないかと調べると次のような定理があった。



☆ピタゴラスの定理☆

$$da^2 = de^2 + ea^2$$

つまり、先程求めたdaの2乗からde=1.5mの2乗を引けば、おおよそのeaが求まる！

$$\left(ea = \sqrt{da^2 - de^2}\right)$$

<例：実験1のタイルを置いた距離が3mのとき>

$ea = \sqrt{3.70253164564^2 - 1.5^2} \fallingdotseq 3.38507615673$
$\fallingdotseq 3.39$ … eaの計算値

実際のeaは3mであるので、計算値はおおよそあっている。

以上のようにして計算し、実験1の「タイルを置いた距離」が0〜9.5mのとき全ての計算値を求め、表にまとめた。

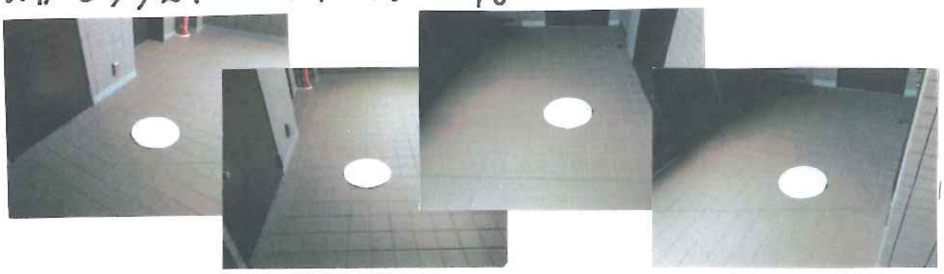
実験1と計算値

タイルを置いた距離(m)	写真上の台形の高さ(cm)	写真上の台形の底辺の長さ(cm)	台形の高さと底辺の長さの比	計算値(m)	実際と計算値の距離の誤差(m)
0	8.15	8.15	1	0	0
0.5	7.8	8.9	0.8764...	0.82	0.32
1	6.75	9.2	0.7336...	1.39	0.39
1.5	5.3	8.5	0.6235...	1.88	0.38
2	5.95	11.5	0.5173...	2.48	0.48
2.5	4.4	9.55	0.4607...	2.89	0.39
3	3.95	9.75	0.4051...	3.39	0.39
3.5	3.6	8.6	0.4186...	3.25	-0.25
4	2.5	7.65	0.3267...	4.34	0.34
4.5	1.7	5.6	0.3035...	4.71	0.21
5	1.05	3.9	0.2692...	5.37	0.37
5.5	1	4	0.25	5.81	0.31
6	1	4.05	0.2469...	5.89	-0.11
6.5	0.9	4.05	0.2222...	6.58	0.08
7	0.8	3.9	0.2051...	7.16	0.16
7.5	0.8	4.3	0.1860...	7.92	0.42
8	0.75	4	0.1875	7.86	-0.14
8.5	0.65	3.85	0.1688...	8.76	0.26
9	0.6	3.6	0.1666...	8.87	-0.13
9.5	0.55	3.4	0.1617...	9.15	-0.35

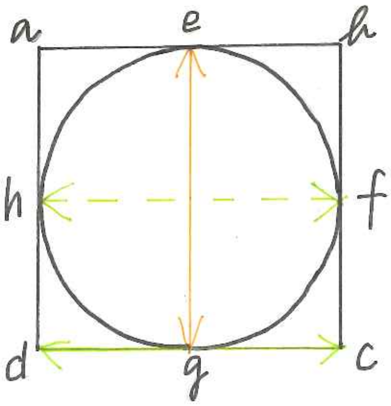
実際と計算値は大きな誤差はなかった。よって、この計算方法でおおよその見ている地点までの距離を求められることが分かった。

しかし、下の写真のようにタイルを斜めから見てしまうと、正確な「台形の高さと底辺の長さの比」が求められない。なので、正方形など四角形ではなく、どこから見ても正確に比を求められる図形はないかと考えたところ、"円"を思いついた。

↑タイルを斜めから見たとき



↑これらの円の比を縮小する前の写真で求めると全て $\frac{1.9}{2.15}$ になった。

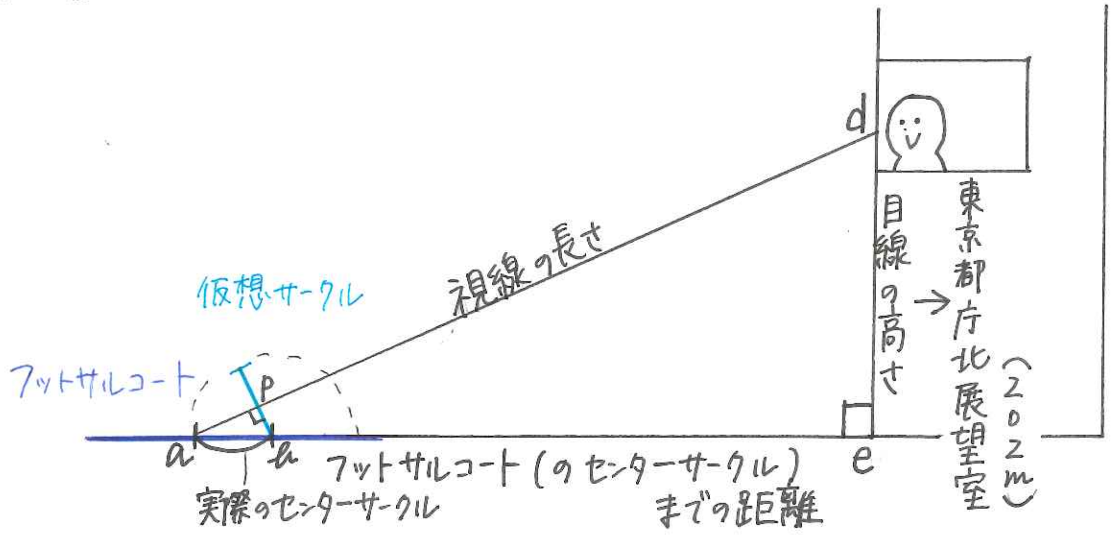


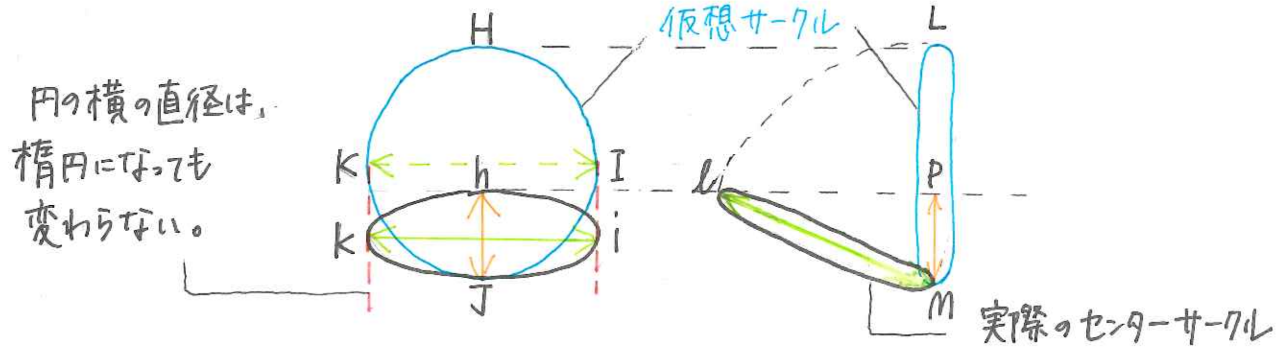
左図のように正方形と円を重ねてみると、実験での比は $\frac{eg}{dc}$ にあたる部分であり、円上では $\frac{eg}{hf}$ にあたる。

これらを踏まえて、実際に見ている地点までの距離を求める。

・実際に計算してみる！

夏休み中に東京に行く機会があった。そのとき訪れた東京都庁の北展望室から見えた新宿中央公園のフットサルコートを使い、実際に計算してみる。

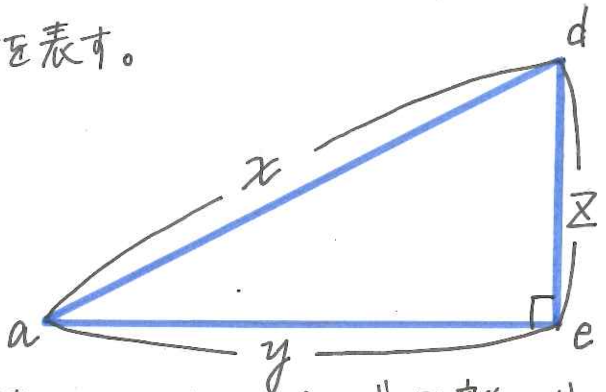




図より楕円の直径の比は $\frac{Jh}{ik}$。従って $Jh = Mp$ ik は同じく円の直径である Ml と等しく、$\frac{Mp}{Ml}$ が比となる。これを上の図にあてはめると $\frac{ap}{aa}$ = 相似の三角形なので $\frac{de}{da}$ となる。

左の写真より、センターサークルの比を求めると、写真上の縦の直径は1cm、横の直径は1.65cmなので、比は $\frac{1}{1.65}$ である。

この計算では下図のようにして各辺の長さを表す。



☆ピタゴラスの定理☆

$x^2 = y^2 + z^2$ …となる。

ピタゴラスの定理より $y = \sqrt{x^2 - z^2}$ を使ってフットサルコートまでの距離を求める。
z は展望室の高さなので 202m である。

$$\frac{de}{da} = \frac{z}{x} = \frac{1}{1.65}$$

$$x = 202 \times 1.65 = 333.3\,(m)$$

$$
\begin{aligned}
y = \sqrt{x^2 - z^2} &= \sqrt{333.3^2 - 202^2} \\
&= \sqrt{111088.89 - 40804} \\
&= \sqrt{70284.89} \\
&\fallingdotseq 265.112975917 \\
&\fallingdotseq 265 \quad \text{… } y \text{ の計算値 } (m)
\end{aligned}
$$

A. 265m

以上の計算よりフットサルコートまでの距離は約265mとなった。Googleマップで展望室からフットサルコートまでの距離を測定すると、267.32mとなった。計算値との誤差は約2mであるので、答えはほとんどあっていると言えるだろう。

今度は、ピタゴラスの定理を使って、展望室の高さを求める。Yのフットサルコートまでの距離は、P.8のGoogleマップの測定より267.32mとする。

$\frac{z}{x} = \frac{1}{1.65}$　$\frac{x}{z} = 1.65$　$x = 1.65z$ … これをピタゴラスの定理に代入する

$(1.65z)^2 = 267.32^2 + z^2$

$1.65^2 \times z^2 = 267.32^2 + z^2$

$1.65^2 \times z^2 - z^2 = 267.32^2$

$(1.65^2 - 1)z^2 = 267.32^2$

$z^2 = \frac{267.32^2}{1.65^2 - 1}$　$z^2 = \frac{267.32^2}{1.7225}$　$z \fallingdotseq 203.681618423$

$\fallingdotseq 204$ … zの計算値(m)

A. 204m

以上の計算より展望室の高さは約204mとなった。実際は202mであるので計算値との誤差は約2m。よって、答えはほとんどあっていると言えるだろう。

★感想と今後の課題★

身近な疑問から始まったこの研究だったが、結果は自分でも驚くほど大きな収穫となった。

実際に計算してみるまでの考え方は、いくつもの段階を踏み、少し複雑で、どうしたら考えやすくなるか…頭を悩ませることも何度かあった。しかし、表・グラフ・図などを使うことで分かりやすくなり、頭も整理された。今回の研究で改めて図等を書くことの大切さを思い知った。

今回の研究は、展望台などに行ったときに大いに使うことができると思う。景色を見て楽しむだけでなく、その地点までの距離が求められればもっともっと楽しむことができるだろう。

今後は、円や正方形以外の形でも距離や高さが求められるのか検証してみたい。

★参考文献★

・manapedia.jp　・yokoso.metro-tokyo.jp