

# 「正多面体は5種類しかない！」

## → 計算的に証明してみました!!

同志社中学校数学科



中学校では立体図形の学習で、図形的に「正多面体が5種類しかない」ことを確認します。

実は、同じく中1で学ぶ「オイラーの多面体公式」を使って、計算で（代数的に）正多面体が5種類しかないことを説明することができます。途中で、文字から文字への代入や、因数分解があり、テクニックを使う場面もあり、中学生には少し難しいレベルです。最後に各面  $p$  角形の「 $p$ 」、頂点に集まる辺（面）、 $q$ (キュー)本の「 $q$ 」の整数条件を考えることで、5通りの答えが出てきます。この内容は日本の学校ではあまり習わないのですが、計算していくと「正多面体が5種類しかない」という結論がいつのまにか出てきます。数式の不思議さを感じながら計算を体験してもらえたらうれしいです。

今回は、中1の授業内容の確認をしつつ教員が文字式の説明を進めました。板書上の黄色い枠で囲んだ3つの式を使って結論に到達しています。pとqに注目して板書を眺めてみてください。

参加してくれた3人の皆さん、ありがとうございました。

(今回の内容は、本校ホームページ、Do★MATHブログ2019/11/17付、11/29付で詳しく紹介します。)

(数学科 園田毅)

### (1) オイラーの多面体公式

オイラーの多面体公式

$$\text{面} + \text{頂} - \text{辺} = 2$$

①  $6 + 8 - 12 = 2$

(F) (V) (E)

### (2) 面、頂点、辺の関係2式

面が  $P$  角形

頂点に集まる面(辺)の数  $Q$

$$\text{面} \times \text{面} = \text{辺} \times 2$$

$$5 \times 12 = 30 \times 2$$

②  $\text{面} = \frac{\text{辺} \times 2}{P}$

$$\Delta \times \text{頂} = \text{辺} \times 2$$

$$3 \times 20 = 30 \times 2$$

③  $\text{頂} = \frac{\text{辺} \times 2}{Q}$

### (3) 代入して、計算

②③を①に代入

$$\left(\frac{\text{辺} \times 2}{P}\right) + \left(\frac{\text{辺} \times 2}{Q}\right) - \text{辺} = 2$$

$$\frac{2}{P} + \frac{2}{Q} - 1 = \frac{2}{\text{辺}} > 0$$

$$\frac{2}{P} + \frac{2}{Q} - 1 > 0$$

$P, Q$ を両辺にかけます

$$2Q + 2P - PQ > 0$$

### (4) 不等式から5種類の答え

両辺に  $(-1)$ をかける

$$PQ - 2P - 2Q < 0$$

両辺に  $4$ をたす

$$PQ - 2P - 2Q + 4 < 4$$

$$(P-2)(Q-2) < 4$$

$Q-2$	$20$	$(3, 5)$
$P$	$12$	$(5, 3)$
$Q-2$	$4$	$(3, 3)$
$P$	$6$	$(4, 3)$
$Q-2$	$3$	$(3, 4)$
$P$	$8$	$(3, 4)$